4/10/2018

Απόδειξη: Το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός γιατί:

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m = n\sqrt{2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$

Στο m/n τα m,n δεν είναι πολλαπλάσια του 2. Το m^2 είναι άρτιος γιατί: $m^2 = 2n^2 \rightarrow$ m άρτιος $\rightarrow m = 2k$
Οπότε $m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$, άρα n^2 είναι άρτιος οπότε n άρτιος.
Επομένως αφού m,n άρτιοι τότε άτοπο και αυτό σημαίνει ότι το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, οπότε το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Πραγματικοί αριθμοί ℝ : η ένωση των ρητών και των άρρητων

$ax=\beta$

$ax^2+\beta x+\gamma=0 \rightsquigarrow x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, $\alpha\neq 0$

Φανταστικοί αριθμοί

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-1}$

Θεωρώ $\sqrt{-1}=i$

$a\cdot i$, $a\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$

→ Πραγματικοί + Φανταστικοί → Μιγαδικοί ℂ : $a+bi$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq H$

$+\cdot$ $\pm\cdot$ $\pm\div$ $\pm\div$ $\pm\div$

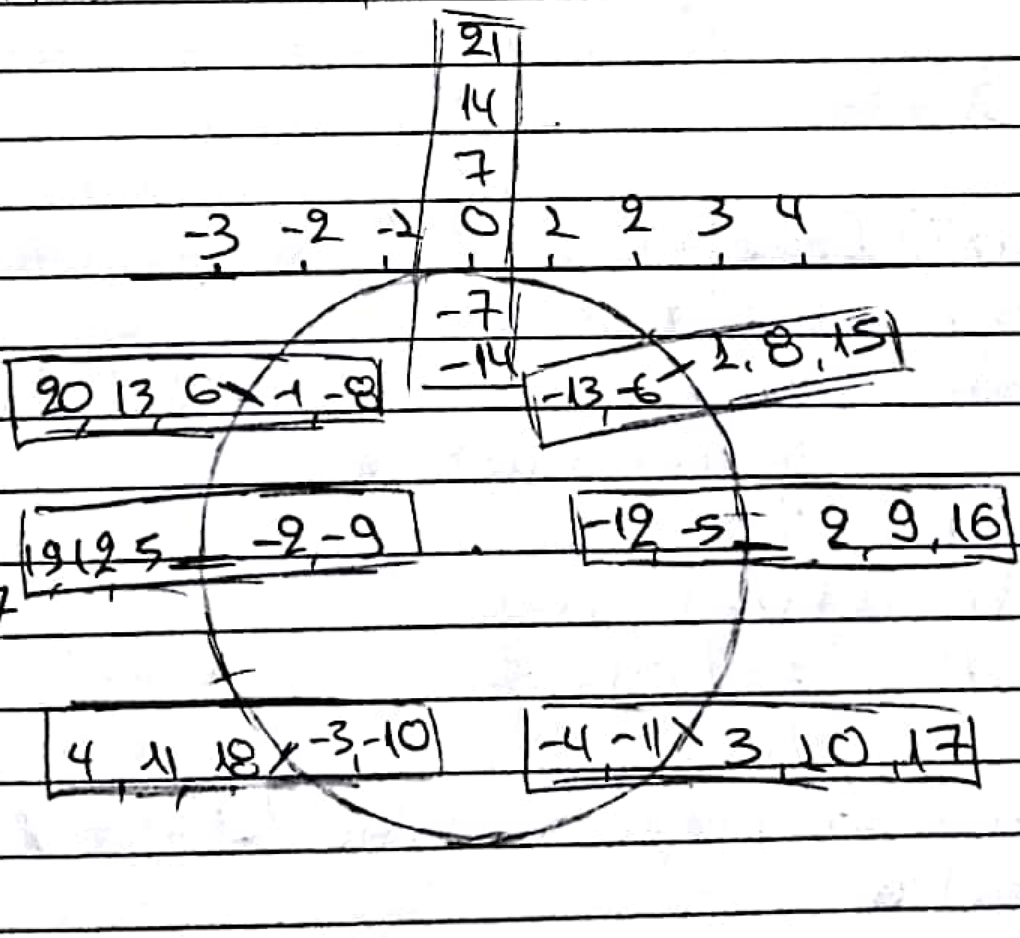
δακτύλιος   σώμα

Z

$\boxed{n=7}$

↓

σημαίνει ότι η περιφέρεια του κύκλου ισούται με 7

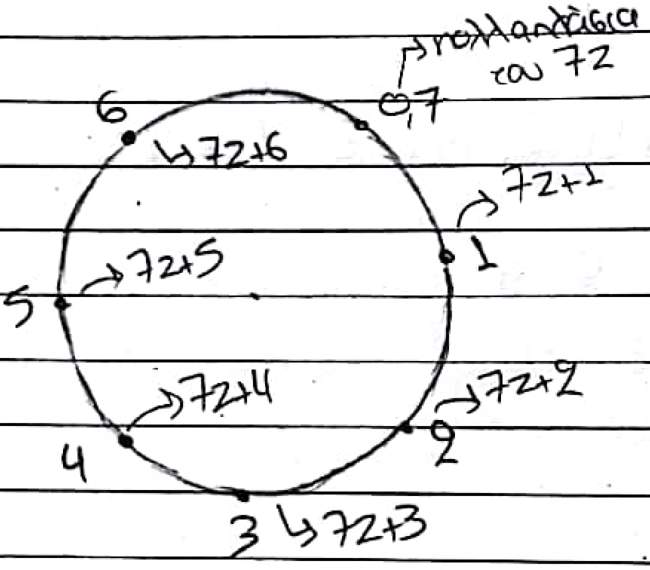


Έστω ότι τυχαία παίρνω αριθμούς από αυτούς στον κύκλο και κάνω πράξεις πχ: $9-3=6$. Αλλά παρατηρώ ότι όποιον αριθμό a και να πάρω από το κάτι με το 9 και όποιον αριθμό $β$ να πάρω από το κάτι με το -3 η πράξη $a+β$ θα βγει αριθμός $γ$ μέσα από το κάτι με το 6.

Επίσης, όταν βρίσκονται στο ίδιο κάτι μπορώ να πω:

$[1]_7 = [8]_7 = [-6]_7$

$[0]_7 = [7]_7 = [14]_7 = [-7]_7$



$[a]_7 + [β]_7 = [a+β]_7$

$[a]_7 - [β]_7 = [a-β]_7$

$[a]_7 \cdot [β]_7 = [aβ]_7$

$[0]_7$: είναι ο μηδενικός αριθμός

$[1]_7 \cdot [1]_7 = [1]_7$

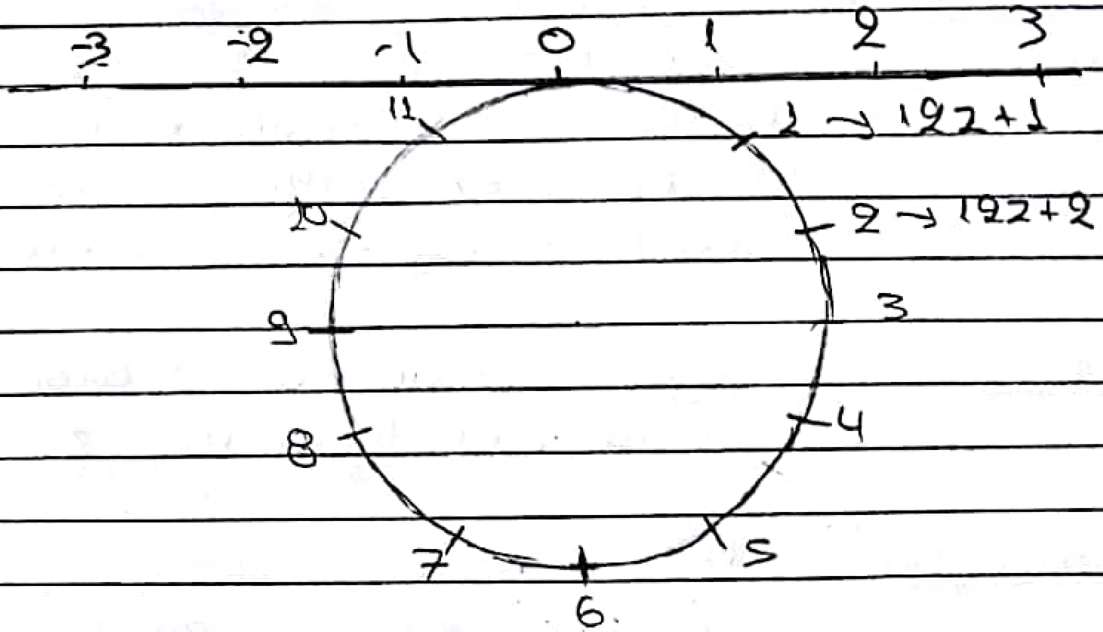
$[2]_7 \cdot [4]_7 = [1]_7 = [8]_7$

$[3]_7 \cdot [5]_7 = [1]_7 = [15]_7$

Οπότε στο Z_7 μπορώ να κάνω $+, \cdot, -, /$ άρα λέγεται σώμα.

$\mathbb{Z}$

$\boxed{n=12}$



$12\mathbb{Z} = [0]_{12} = [60]_{12} = [72]_{12}$

Προσοχή! Το 2 και το 3 (για $n=12$) παρατηρώ ότι δεν έχουν αντίστροφο, δηλαδή δεν γίνεται αυτό:

$[2]_{12}$ [κάτι] $= [1]_{12}$ $[3]_{12}$ [κάτι] $= [1]_{12}$

$[3]_{12} \cdot [4]_{10} = [0]_{12}$ γιατί $[0]_{12} = [12]_{12}$

$z = a + bi \quad , a, b \in \mathbb{R} \quad , i^2 = -1$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a_1 + b_1 i$ και $z_2 = a_2 + b_2 i$ λέγονται ίσοι αν $a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$

Παράδειγμα: $a + bi = 0 + 0i \Rightarrow a = 0$ και $b = 0$

→ $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Παράδειγμα: $(1 + \sqrt{3} i) + (-7 + 2i) = -6 + (\sqrt{3} + 2) i$

→ $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

→ Πολλαπλασιασμός $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)$

Απόδειξη $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) =$

$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = a_1(a_2+b_2 i)+b_1 i(a_2+b_2 i) =$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$

$= a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2$

Ορισμός: Ο συζυγής αριθμός του $z = a+bi$ είναι ο αριθμός $a-bi$ και συμβολίζεται με $\bar{z}$

Παράδειγμα: $\overline{1+3i} = 1-3i$

$\left.\begin{array}{l}\bar{0}=0\\ \bar{3}=3\end{array}\right\}$ γιατί γράφονται $\overline{0+0i} = 0-0i = 0$

Ιδιότητες των Συζυγών

- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1/z_2} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Παράδειγμα: Βρες το συζυγές

$$\overline{\left(\frac{(1-3i)(2+i\sqrt{2})}{11-2i}\right)} = \frac{(1+3i)(2-i\sqrt{2})}{11+2i}$$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2$ (γιατί $i^2=-1$)

Scanned by CamScanner

$$\frac{a+bi}{\gamma+\delta i} = \frac{(a+bi)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \frac{a\gamma - a\delta i + \gamma b i - b\delta i^2}{\gamma^2+\delta^2} =$$

$$= \frac{a\gamma - (a\delta + \gamma b) i + b\delta}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{a\gamma + b\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\gamma b - a\delta}{\gamma^2+\delta^2} i$$